www.tunisie-etudes.fr.nf

IPEST **Année universitaire 2006-2007**
Miladi Mohamed Ali
MPSI3

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Soit $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$. Montrer que, pour les lois usuelles, E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Exercice 2

Soit F, G, H trois s.e.v d'un $\mathbb{K}$ e.v. E.
Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$ puis $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.
Montrer que $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynômes.
Montrer que $E = \text{Vect}(\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, \cdots, 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \cdots\})$
Comparer $\text{Vect}(\{\cos(nx), n \in \mathbb{N}\})$ et $\text{Vect}(\{(\cos(x))^n, n \in \mathbb{N}\})$

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ donné. Montrer que $F = \{f \in E, f(a) = 0\}$ est un s.e.v de E, puis donner un supplémentaire de F dans E.

Exercice 5

Montrer que la réunion de deux s.e.v de E est un s.e.v. de E si et seulement si l'un est inclu dans l'autre.

Exercice 6

Soient A, B deux parties d'un e.v E. Comparer $Vect(A \cap B)$ et $Vect(A) \cap Vect(B)$ puis montrer que $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$

Exercice 7

Soit $F = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{C}), \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$ et $G = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{C}), f = cte\}$. Montrer que F et G sont deux s.e.v supplémentaires de $C([-1, 1], \mathbb{C})$.

Applications linéaires

Exercice 8

Soit E un $K-$espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \qquad \text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Im } f + \text{Ker } f = E.$$

Exercice 9

Démontrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1, 2) = (1, 1, 0) \quad f(2, 1) = (0, 1, 1)$$

Calculer $f(x, y)$ Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 10

Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme $f : z \longmapsto az + b\bar{z}$ où $a, b \in \mathbb{C}$.

www.tunisie-etudes.fr.nf

Exercice 11

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f - 3Id_E = 0$.
Montrer que $\ker(f - Id_E) \bigoplus \ker(f - 3Id_E) = E$ puis que $f \in \mathcal{GL}(E)$. Déterminer f^{-1}.

Exercice 12

Soit E un K e.v et $f \in \mathcal{L}(E)$ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^n = 0$. Montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$ et déterminer f^{-1}

Exercice 13

Soit E le $\mathbb{R}$ e.v des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ et $\psi : E \longrightarrow E$, les applications définies par $\varphi(f) = f'$ et $\psi(f) = \int_0^x f(t)dt$.
Montrer que ψ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et exprimer $\varphi o \psi$ et $\psi o \varphi$. Déterminer les noyaux et images de φ et ψ

Transformations vectorielles

Exercice 14

Soit E un $K-$espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E. Montrer que:

$$pq = p \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p \qquad pq = q \Longleftrightarrow \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$$

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v. et p un projecteur de E.
Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur puis comparer les images et les noyaux de p et $\mathrm{Id}_E - p$.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v. et p et q deux projecteurs de E.
1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$
2. Montrer que dans ce cas $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$

Exercice 17

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fog = gof$.
Montrer que $g(\ker f) \subset f$ et $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.
En déduire que, si p est un projecteur de E on a p et f commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f (cad $f(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p$ et $f(\ker p) \subset \ker p$

Exercice 18

Soit $(\alpha, \beta) \in E = \mathbb{R}^2$. Dans E on définit l'endomorphisme $g_{\alpha,\beta}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 g_{\alpha,\beta}(x, y) = (\alpha x - 2\alpha y, 2\beta x + \beta y)$$

Déterminer α, β pour que g soit un projecteur.
Déterminer dans ce cas les éléments caractéristiques de $g_{\alpha,\beta}$.